XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 8,9 классов

Решение задачи 1

Отметим, что восстановить исходный текст короткого сообщения, зашифрованного с использованием такого шифра (называемого шифром простой замены) не так-то просто. Помогает здесь то, что в сообщении сохранена разбивка на слова, оставлены знаки препинания и заглавные буквы. Если обратить внимание на сочетание **Яспар-Дюрюмгщмт** и содержащееся в ответе Godzillы упоминание города **Питера,** то можно предположить, что речь идёт о **Санкт-Петербурге**. Составим таблицу соответствий:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
К			Б	П									Р			Н	Т	А	Г						У						Е	С

В соответствии с этими заменами некоторые буквы в шифрованном тексте можно восстановить:

. .А.ТРА УЕ..А. . САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА ..Е НЕ.Е.. . ПАР...: БУРГУН...

Далее подбираем некоторые слова по смыслу. Весьма вероятно, что **.А.ТРА**—это **ЗАВТРА**, **ПАР...**—это **ПАРОЛЬ**. С учётом этих предположений сообщение примет вид:

. ЗАВТРА УЕЗ.А. В САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА .ВЕ НЕ.ЕЛ. . ПАРОЛЬ: БУРГУН...

Затем по смыслу окончательно получаем искомое сообщение.

Ответ: Я завтра уезжаю в Санкт-Петербург на две недели. Пароль: Бургундия.

Решение задачи 2

Обозначим через x число букв, получившихся при наборе цифры 7 (их может быть от 1 до 3), y – число букв при наборе цифры 5 (1 или 2) и z – число букв при наборе цифры 9 (от 2 до 5). Перечислим возможные варианты представления числа 10 в виде суммы $x+1+y+1+z$:

1) 3+1+2+1+3; 2) 3+1+1+1+4; 3) 2+1+2+1+4; 4) 2+1+1+1+5; 5) 1+1+2+1+5.

Для варианта 1 получить три буквы, нажимая 7, можно только одним способом; получить две буквы, нажимая 5, можно опять-таки только одним способом; а вот получить три буквы с помощью пяти девяток можно 6 способами. В итоге, для варианта 1 имеем $1\cdot1\cdot6$ вариантов паролей, аналогично для варианта 2 будет $1\cdot1\cdot4$ вариантов паролей и т.д. Всего получаем $6+4+2\cdot4+2+1=21$ вариант.

Ответ: 21.

Решение задачи 3

Разность значений квадратичной функции должна делиться на разность значений аргументов. Проверим выполнение этого факта для различных пар значений:

- для первого и второго: 357–273=84 делится на 3;

- для третьего и четвертого: 497–391=106 не делится на 3; следовательно, значение исказили или гномы, или орки;

- для первого и третьего: 391–273=118 не делится на 4, следовательно, значение исказили тролли или гномы.

- для второго и четвертого: 497–357=140 делится на 4.

Ответ: Гномы сообщили неверное значение.

Решение задачи 4

Сначала заметим, что после первого оборота количество дуг равно 2^2, после второго – 2^3, после последнего – 2^{n+1}. Пусть после оборота с номером k, $1 \le k \le n$ в точках деления окружности на дуги расположены числа $x_1, x_2, ..., x_{2^{k+1}}$.Тогда в ходе оборота с номером $k+1$ на окружности появятся следующие новые числа

$$y_1 = \frac{3x_1 + 3x_2}{2},\ y_2 = \frac{3x_2 + 3x_3}{2}, \ldots,\ y_{2^{k+1}} = \frac{3x_{2^{k+1}} + 3x_1}{2}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} y_i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i .$$

Значит, после $k+1$ оборота сумма всех чисел на окружности возрастёт в 4 раза. Если учесть, что первоначальная сумма чисел на окружности равнялась 6, то получаем окончательный ответ.

Ответ: $6 \cdot 4^n$.

Решение задачи 5

Граф, используемый в задаче, обладает следующим свойством: из множества всех его вершин можно выделить такое подмножество V (отмеченное на рис. 5 кружочками), что любая вершина графа лежит в окрестности ровно одной вершины из V. Окрестностью вершины графа называют множество соседних с ней вершин, включая её саму. Очевидно, что искомое число равно сумме чисел, расположенных в вершинах из множества V: $112+104+96+144+136+128+120=840$.

Ответ: 840.

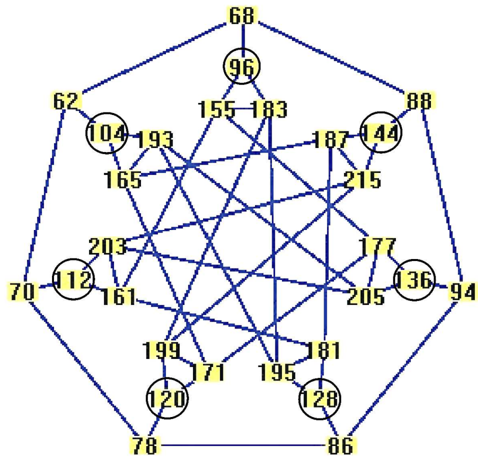

Рис. 5

Решение задачи 6

Для комбинации 1,0,1,1,0 – проход открыт, а для 0,0,1,1,0 – проход закрыт. То есть при изменении значения первой координаты с 1 на 0 значение суммы становится меньше c, поэтому очевидно, что $a_1 > 0$. Аналогично:

$$\left.\begin{array}{r}1,1,1,1,1\text{ - открыто}\\ 1,0,1,1,1\text{ - закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_2 > 0;$$

$$\left.\begin{array}{r}1,1,1,1,1\text{ - открыто}\\ 1,1,0,1,1\text{ - закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_3 > 0;$$

$$\left.\begin{array}{r}1,0,1,1,0\text{ - открыто}\\ 1,0,1,0,0\text{ - закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_4 > 0;$$

$$\left.\begin{array}{r}1,0,1,1,0\text{ - открыто}\\ 1,0,1,1,1\text{ - закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_5 < 0.$$

Поэтому заведомо пройдет комбинация, максимизирующая значение суммы S, а именно 1,1,1,1,0. Отметим, что задача составлена таким образом, что других решений нет.

Ответ: 1,1,1,1,0.

Критерии определения победителей и призеров XX межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии

Жюри XX Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии установило следующие критерии определения победителей и призеров среди учащихся 8 и 9 классов:

1 место – решены все шесть задач, возможно, с одним несущественным недостатком;

2 место – решено не менее четырех задач, либо четыре задачи с одним-двумя несущественными недостатками при наличии заметных продвижений по соответственно одной-двум другим задачам;

3 место – полностью решено не менее трёх задач.